

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему: **«Вісісиметрична задача кручення двошарового
циліндру з міжфазним дефектом»**

«Axisymmetric problem of torsion of a two-layer cylinder with an interphase defect»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика Мартинюк
Георгій Олександрович

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Процеров Ю. С. _
Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Фесенко Г. О.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від _____ 2022 р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол № ____ від _____ 2022 р.
Оцінка _____ / _____ / _____
Голова ЕК

Одеса - 2022 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Основна частина	4
1.1 Постановка задачі	4
2 Зведення поставленої задачі до одновірної крайової задачі	6
2.1 Знаходження трансформанти зміщень:	8
2.2 Умови відсутності напруження на берегах потрїскання	10
3 Розв'язання інтегро-диференціальнoго рівняння методом ортогональних многочленів.	15
3.1 Розв'язання інтегро-диференціальнoго рівняння методом ор- тогональних многочленів.	15
4 Знаходження коефіцієнтів інтенсивності напруження	18
Висновки	20
Список літератури	21

ВСТУП

Циліндри і, зокрема, і багатошарові використовуються в багатьох конструкціях, наявність у них дефектів у вигляді тріщин погіршує їх механічні властивості. Маємо задачу кручення складеного циліндру з міжфазною тріщиною, що складається з двох співвісних циліндрів та з модулем зсуву. Нижня основа циліндра, нерухомо закріплена, верхня основа вільно від напруг. Усунення повинні задовольняти рівнянням Ламе. Мета роботи звести задачу до одновимірної крайової, розв'язати інтегро- диференціальне рівняння методом ортогональних багаточленів, та знайти коефіцієнти інтенсивності напруги.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Постановка задачі

Розглянемо пружне тіло у вигляді циліндру $0 \leq r \leq R$; $-\pi \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq z \leq h$, що складається з двох співвісних циліндрів $0 \leq r \leq a$ та $a \leq r \leq R$ з модулем зсуву G_1 та G_2 відповідно. Шари знаходяться в умовах ідеального механічного контакту (рівність зміщення та напруження) всюди, за винятком ділянки $c \leq z \leq d$ циліндричної поверхні, де розташована тріщина, береги якої вільні від напружень. Нижня основа циліндра, нерухомо закріплена, верхня основа вільно від напруження, а до бічної поверхні $r = R$ прикладена осисемітрична дотична навантаження, що викликає кручення складеного циліндра, що розглядається.

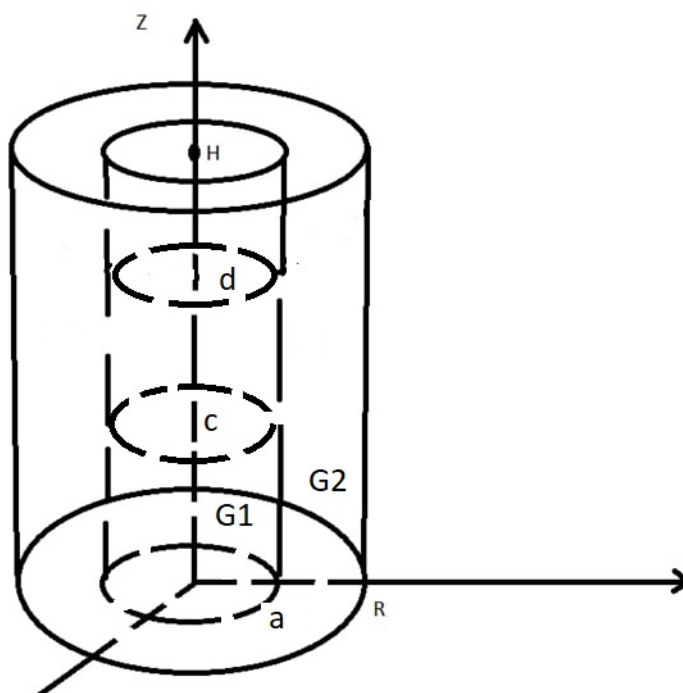


Рис. 1.1. Пружне тіло у вигляді циліндру.

У такій постановці всі величини не залежатимуть від кутової координати χ і відмінними від нуля будуть тільки кутові зміщення $U_j(r, z) =$

$U_\chi^j(r, z), j = 1, 2$ кожного з шарів циліндра і два дотичні напруження

$$\tau_{r\chi}^j = G_j \left(\frac{\partial U_j}{\partial r} - \frac{1}{r} U_j \right)$$

та

$$\tau_{z\chi}^j = G_j \frac{\partial U_j}{\partial z}, j = 1, 2$$

в кожному з шарів циліндра. Переміщення повинні задовольняти рівнянням Ламе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial U_j}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} U_j + r \frac{\partial^2 U_j}{\partial z^2} = 0, & \quad 0 < r < a \quad j = 1 \\ & \quad a < r < R \quad j = 2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Крайові умови мають вигляд:

$$U_j(z, 0) = 0; \tau_{z\chi}^j(r, h) = G_j \frac{\partial U_j}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0, j = 1, 2 \quad (1.2)$$

$$\tau_{r\chi}^2(a, z) = G_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial z} - \frac{1}{z} U_2 \right) \Big|_{r=R} = p(z), 0 < z < h \quad (1.3)$$

Умови сполучення шарів набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} U_1(a - 0, z) - U_2(a + 0, z) &= \psi(z) \\ \tau_{r\chi}^1(a - 0, z) - \tau_{r\chi}^2(a + 0, z) & \end{aligned} \quad (1.4)$$

Де $\psi(z)$ невідома функція (стрибок переміщення під час переходу через тріщину), рівна нулю при $z \in (0; c) \cup (d; h)$ Крім того напруження на берегах тріщини відсутні

$$\tau_{r\chi}^1(a - 0, z) = \tau_{r\chi}^2(a + 0, z) = 0, c < z < d \quad (1.5)$$

РОЗДІЛ 2

ЗВЕДЕННЯ ПОСТАВЛЕНОЇ ЗАДАЧІ ДО ОДНОМІРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Для зведення поставленої задачі до одномірної крайової задачі, скористаємося кінцевим інтегральним перетворенням змінної z :

$$U_{jk}(z) = \int_0^h U_j(r, z) \sin \lambda_k z dz, \lambda_k = \frac{\pi}{2h}(2k-1), k = 1, 2, \dots$$

з формулою звернення

$$U_j(r, z) = \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} U_{jk}(r) \sin \lambda_k z$$

Застосувавши його до рівнянь (1), при цьому крайові умови (2) будуть задовільнені, отримаємо

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_{jk}}{dr} \right) - \frac{1}{r} U_{jk}(r) - r \lambda_k^2 U_{jk}(r) = 0, j = 1, 2 \quad (2.1)$$

Застосуємо його до крайових умов (3)

$$RU_{2k}^1(R) - U_{2k}(R) = \frac{R}{G_2} P_k \quad (2.2)$$

де

$$P_k = \int_0^h P(z) \sin \lambda_k z dz$$

та умовам сполучення (4)

$$U_{1k}(a-0) - U_{2k}(a+0) = \psi_k \quad (2.3)$$

$$G_1[aU'_{1k}(a-0) - U_{1k}(a-0)] - G_2[aU'_{2k}(a+0) - U_{2k}(a+0)] = 0$$

де

$$\psi_k = \int_c^d \psi(z) \sin \lambda_k z dz$$

Загальні рішення рівнянь (6) мають вигляд:

$$U_{1k}(r) = A_k I_1(\lambda_k r), 0 \leq r < a$$

$$U_{2k}(r) = B_k I_1(\lambda_k r) + C_k K_1(\lambda_k r), a < r < a$$

де $I_k(x)$ та $K_1(x)$ модифіковані функції Бесселя, а A_k , B_k та C_k - довільні постійні. Для їх знаходження скористаємося крайовими умовами (7) та умовами сполучення (8):

$$B_k [R \lambda_k I_1'(\lambda_k R) - I_1(\lambda_k R)] + C_k [R \lambda_k K_1'(\lambda_k R) - K_1(\lambda_k R)] = \frac{R}{G_2} P_k$$

$$A_k I_1(\lambda_k a) - B_k I_1(\lambda_k a) - C_k K_1(\lambda_k a) = \psi_k$$

$$G_1 A_k [a \lambda_k I_1'(\lambda_k a) - I_1(\lambda_k a)] - G_2 B_k [a \lambda_k I_1'(\lambda_k a) - I_1(\lambda_k a)] - G_2 C_k [a \lambda_k K_1'(\lambda_k a) - K_1(\lambda_k a)] = 0$$

Враховуючи формули

$$x I_2(x) = x I_1'(x) - I_1(x)$$

$$-x K_2(x) = x K_1'(x) - K_1(x)$$

Запишемо отриману систему у вигляді:

$$B_k I_2(\lambda_k R) - C_k K_2(\lambda_k R) = \frac{P_k}{\lambda_k G_2}$$

$$(A_k - B_k) I_1(\lambda_k a) - C_k K_1(\lambda_k a) = \psi_k$$

$$G_1 A_k I_2(\lambda_k a) - G_2 B_k I_2(\lambda_k a) + G_2 C_k K_2(\lambda_k a) = 0$$

і знайдемо з неї:

Із двох останніх рівнянь з урахуванням тотожності:

$$I_1(X) K_2(x) + I_2(X) K_1(x) = \frac{1}{x}$$

Знаходимо

$$B_k = \lambda_k a [I_1(\lambda_k a) K_2(\lambda_k a) + G_k I_2(\lambda_k a) K_1(\lambda_k a)] A_k - \lambda_k a K_2(\lambda_k a) \psi_k$$

$$C_k = \lambda_k a (1 - G_k) I_1(\lambda_k a) I_2(\lambda_k a) A_k - \lambda_k a I_2(\lambda_k a) \psi_k$$

де

$$G_k = \frac{G_1}{G_2}$$

Підставимо у перше рівняння, знаходимо

$$A_k = [I_2(\lambda_k R) K_2(\lambda_k a) - I_2(\lambda_k a) K_2(\lambda_k R)] \frac{\psi_k}{\Delta_k} + \frac{P_k}{a \lambda_k^2 G_2 \Delta_k}$$

$$\Delta_k = [I_1(\lambda_k a) K_2(\lambda_k a) + G_k I_2(\lambda_k a) K_1(\lambda_k a)] I_2(\lambda_k R) - (1 - G_k) I_1(\lambda_k a) I_2(\lambda_k a) K_2(\lambda_k R)$$

Знайдемо B_k та C_k :

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{P_k}{\lambda_k G_2 \Delta_k} - G_k \lambda_k a \frac{\psi_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k a) K_2(\lambda_k R) [I_2(\lambda_k a) K_1(\lambda_k a) + I_1(\lambda_k a) K_2(\lambda_k a)] = \\ &= \frac{P_k}{\lambda_k G_2 \Delta_k} - G_k \frac{\psi_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k a) K_2(\lambda_k R) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_k &= \lambda_k a (1 - G_k) I_1(\lambda_k a) I_2(\lambda_k a) A_k - \lambda_k a I_2(\lambda_k a) \psi_k = \\ &= (1 - G_k) \frac{P_k}{\lambda_k G_2 \Delta_k} I_1(\lambda_k a) I_2(\lambda_k a) - G_k \frac{\psi_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k a) I_2(\lambda_k R) \end{aligned}$$

Знаходження трансформанти зміщень:

$$\begin{aligned} U_{1k}(r) &= A_k * I_1(\lambda_k r) = \frac{P_k}{a \lambda_k^2 G_2 \Delta_k} I_1(\lambda_k r) + \frac{\psi_k}{\Delta_k} * (\\ &* [I_2(\lambda_k R) K_2(\lambda_k a) - I_2(\lambda_k a) K_2(\lambda_k R)] I_1(\lambda_k r), 0 \leq r < a \end{aligned}$$

та $U_{2k}(r)$:

$$U_{2k}(r) = B_k I_1(\lambda_k r) + C_k K_1(\lambda_k r) = \frac{P_k}{\lambda_k G_2 \Delta_k} [I_1(\lambda_k r) - \\ - (1 - G_k) I_1(\lambda_k a) I_2(\lambda_k a) K_1(\lambda_k r) - \\ - G_k \frac{\psi_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k a) [I_1(\lambda_k r) K_2(\lambda_k R) I_2(\lambda_k R) K_1(\lambda_k r)]]$$

Скористаємося формулою обігу інтегрального перетворення:

$$\psi_k = \int_c^d \psi(\varepsilon) \sin \lambda_k \varepsilon d\varepsilon$$

І змінимо порядок підсумовування та інтегрування

$$U_1(r, z) = \frac{2}{ahG_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\lambda_k^2 \Delta_k} I_1(\lambda_k r) \sin \lambda_k z + \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k}{\Delta_k} [I_2(\lambda_k R) K_2(\lambda_k a) - \\ - I_2(\lambda_k a) K_2(\lambda_k R)] I_1(\lambda_k r) \sin \lambda_k z = \\ = \frac{2}{ahG_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\lambda_k \Delta_k} I_1(\lambda_k r) \sin \lambda_k z + \\ + \frac{2}{h} \int_c^d \left[\sum_{k=1}^{\infty} [I_2(\lambda_k R) K_2(\lambda_k a) - I_2(\lambda_k a) K_2(\lambda_k R)] \frac{I_1(\lambda_k r)}{\Delta_k} \sin \lambda_k \xi \sin \lambda_k z \right] \chi(\xi) d\xi$$

та

$$U_2(r, z) = \frac{2}{hG_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\lambda_k \Delta_k} [I_1 - (1 - G_k) I_1(\lambda_k a) I_2(\lambda_k a) K_1(\lambda_k r)] \sin \lambda_k z - \\ - \frac{2G_k}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k a) [I_1(\lambda_k r) K_2(\lambda_k R) + \\ + I_2(\lambda_k R) K_1(\lambda_k r)] \sin \lambda_k z = \frac{2}{hG_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\lambda_k \Delta_k} [I_1(\lambda_k r) - \\ - (1 - G_k) I_1(\lambda_k a) I_2(\lambda_k a) K_1(\lambda_k r)] \sin \lambda_k z - \\ - \frac{2G_k}{h} \int_c^d \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k a) [I_1(\lambda_k r) K_2(\lambda_k R) + I_2(\lambda_k R) K_1(\lambda_k r)] \sin \lambda_k \xi \sin \lambda_k z \right] \chi(\xi) d\xi$$

Умови відсутності напруження на берегах потріскання

Отримані вирази для переміщення містять невідому функцію $\chi(\xi)$. Для її визначення слід скористатися умовами відсутності напруження на берегах потрісканні. Так як кожне з них приведе до одного і того ж рівняння, то скористаємося першим із них.

$$\tau_{r\varphi}|_{r=a-0} = G_1\left(\frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{1}{r}U_1\right)|_{r=a-0} = 0, c < z < d$$

Знайдемо спочатку

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{1}{r}U_1 &= \frac{2}{ahG_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\lambda_k \Delta_k} [\lambda_k I_1'(\lambda_k r) - \\ &- \frac{1}{r}I_1(\lambda_k r)] \sin \lambda_k z + \frac{2}{h} \int_c^d \left[\sum_{k=1}^{\infty} [I_2(\lambda_k R) K_2(\lambda_k a) - \right. \\ &- I_2(\lambda_k a) K_2(\lambda_k R)] * [\lambda_k I_1'(\lambda_k r) - \frac{1}{r}I_1(\lambda_k r)] \frac{\sin \lambda_k \xi * \sin \lambda_k z}{\Delta_k} \chi(\xi) d(\xi) = \\ &= \frac{2}{ahG_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k r) \sin \lambda_k z + \frac{2}{h} \int_c^d \left[\sum_{k=1}^{\infty} [I_2(\lambda_k R) K_2(\lambda_k a) - \right. \\ &- I_2(\lambda_k a) K_2(\lambda_k R)] * I_2(\lambda_k r) \frac{\lambda_k \sin \lambda_k \xi \sin \lambda_k z}{\Delta_k} \chi(\xi) d\xi, 0 < r < a \end{aligned}$$

Розглянемо ряд, що стоїть під знаком інтеграла

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k(r) \lambda_k \sin \lambda_k \xi \sin \lambda_k z, 0 < r < a$$

Де

$$F_k(r) = [I_2(\lambda_k R) K_2(\lambda_k a) - I_2(\lambda_k a) K_2(\lambda_k R)] \frac{I_2(\lambda_k r)}{\Delta_k}$$

Використовуючи асимптотичну поведінку модифікованих функцій Бесселя при великих значеннях аргументу

$$I_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, x \rightarrow \infty$$

Можна показати що

$$F_k(r) = O(e^{-\lambda_k(a-r)})$$

Звідси випливає, що цей ряд сходиться рівномірно і абсолютно при $0 < r < a$.

Тоді законно його почленне диференціювання і можна уявити у вигляді

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum_{k=1}^{\infty} F_k(r) \frac{\sin \lambda_k \xi \sin \lambda_k z}{\lambda_k}$$

Тобто:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{1}{r} U_1 = & -\frac{2}{h} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_c^d \left[\sum_{k=1}^{\infty} F_k(r) \frac{\sin \lambda_k \xi \sin \lambda_k z}{\lambda_k} \right] \chi(\xi) d\xi + \\ & + \frac{2}{ahG_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k r) \sin \lambda_k z \end{aligned}$$

Переходячи тут до межі при $r \rightarrow a - 0$ отримаємо інтегральне рівняння щодо функції $\chi(\xi)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_c^d \left[\sum_{k=1}^{\infty} F_k(a) \frac{\sin \lambda_k \xi \sin \lambda_k z}{\lambda_k} \right] \chi(\xi) d\xi = \frac{1}{aG_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k a) \sin \lambda_k z$$

Проаналізуємо ядро отриманого рівняння:

$$K(\xi, z) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(a) \frac{\sin \lambda_k \xi \sin \lambda_k z}{\lambda_k}$$

Використовуючи наведену вище асимптотику модифікованих функцій Бесселя, отримаємо, що

$$F_k(a) = \frac{1}{1 + G_k} [1 + N_k]$$

Де:

$$\begin{aligned} N_k = & \frac{1}{\Delta_k} \left\{ [I_2(\lambda_k a) - I_1(\lambda_k a)] [I_2(\lambda_k R) K_2(\lambda_k a) - I_2(\lambda_k a) K_2(\lambda_k R)] \right\} + \\ & + \left\{ G_k I_2(\lambda_k a) I_2(\lambda_R) [K_2(\lambda_k a) - K_1(\lambda_k a)] - G_k I_2(\lambda_k a) K_2(\lambda_k R) [I_2(\lambda_k a) + I_1(\lambda_k a)] \right\} \end{aligned}$$

при цьому

$$N_k = O(e^{-2\lambda_k(R-a)}), \lambda_k \rightarrow \infty$$

Тоді отримане рівняння можна записати так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_c^d \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k \xi \sin \lambda_k z}{\lambda_k} \right] \chi(\xi) d\xi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_c^d \left[\sum_{k=1}^{\infty} N_k \frac{\sin \lambda_k \xi \sin \lambda_k z}{\lambda_k} \right] * \chi(\xi) d\xi = \\ = \frac{1 + G_k}{aG_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k a) \sin \lambda_k z \end{aligned}$$

Враховуючи поведінку N_k у другому доданку, можна продиференціювати під знаком інтеграла. Далі зробимо заміну, що зводить проміжок $(c; d)$ інтегрування до проміжку $(-1; 1)$

$$z = At + B, \xi = A\eta + B$$

Де:

$$A = \frac{d - c}{2}, B = \frac{d + c}{2}$$

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-1}^1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k (At + B) \sin \lambda_k (A\eta + B)}{\lambda_k} \right] \chi^*(\eta) d\eta - \\ - A \int_{-1}^1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} N_k \sin \lambda_k (At + B) \sin \lambda_k (A\eta + B) \right] \chi^*(\eta) d\eta = \\ = \frac{1 + G_k}{2aG_2} A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k a) \sin \lambda_k (At + B), -1 < t < 1 \end{aligned}$$

Де:

$$\chi^*(\eta) = \chi(A\eta + B)$$

Розглянемо ряд у першому інтегралі та просумуємо його

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} = \frac{1}{4} \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{4}, 0 < x < \pi$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k (At + B) \sin \lambda_k (A\eta + B)}{\lambda_k} = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k (At - \eta) - \cos \lambda_k [A(t + \eta) + 2B]}{\lambda_k} = \\
& = \frac{h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\cos \frac{\pi}{2h} A(t - \eta)(2k - 1)}{2k - 1} - \frac{\cos \frac{\pi}{2h} [A(t + \eta) + 2B](2k - 1)}{2k - 1} \right] = \\
& = \frac{h}{4\pi} \left[\ln ctg^2 \frac{\pi}{8h} A(t - \eta) - \ln ctg^2 \frac{\pi}{8h} [A(t + \eta) + 2B] \right]
\end{aligned}$$

Таким чином інтегральне рівняння набуде вигляду

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-1}^1 \left[\ln ctg \frac{\pi}{8h} A|t - \eta| - \ln ctg \frac{\pi}{8h} [A(t + \eta) + 2B] \right] \chi^*(\eta) d\eta - \\
& - \frac{2\pi}{h} A \int_{-1}^1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} N_k \lambda_k \sin \lambda_k (At + B) \sin \lambda_k (A\eta + B) \right] \chi^*(\eta) d\eta = \\
& = \frac{(1 + G_k)\pi}{ahG_2} A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k a) \sin \lambda_k (At + B), \quad -1 < t < 1
\end{aligned}$$

Перетворимо вираз у першому інтегралі

$$\begin{aligned}
\ln ctg \frac{\pi}{8h} A|t - \eta| &= \ln \frac{1}{|t - \eta|} + \ln ctg \frac{\pi A}{8h} |t - \eta| - \ln \frac{1}{|t - \eta|} = \\
&= \ln \frac{1}{|t - \eta|} + \ln [|t - \eta| ctg \frac{\pi A}{8h} |t - \eta|]
\end{aligned}$$

при цьому другий доданок не має особливості при $t = \eta$, так як

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[x ctg \frac{\pi A}{8h} x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x \cos \frac{\pi A}{8h} x}{\sin \frac{\pi A}{8h} x} \right] = \ln \frac{\pi A}{8h}$$

Таким чином, рівняння може бути записане у вигляді:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t - z|} \chi^*(\eta) d\eta + \int_{-1}^1 L(t, \eta) \chi^*(\eta) d\eta - \\
& - \frac{2\pi}{h} A \int_{-1}^1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} N_k \lambda_k \sin \lambda_k (At + B) \sin \lambda_k (A\eta + B) \right] \chi^*(\eta) d\eta =
\end{aligned}$$

$$= \frac{(1 + G_k)\pi}{ahG_2} A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k a) \sin \lambda_k (A_t + B)$$

Де:

$$\begin{aligned} L(t, \eta) \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \ln[|t - \eta| \operatorname{ctg} \frac{\pi A}{8h} |t - \eta|] - \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8h} [A(t + \eta + 2B)] \right\} = \\ = \frac{(\frac{\pi A}{4h})^2 (t - \eta)^2 \cos \frac{\pi A}{4h} (t - \eta) - \sin^2 \frac{\pi A}{4h} (t - \eta)}{(t - \eta)^2 \sin^2 \frac{\pi A}{4h} (t - \eta)} + \\ + (\frac{\pi A}{4h})^2 \frac{\cos \frac{\pi}{4h} [A(t + \eta) + 2B]}{\sin^2 \frac{\pi}{4h} [A(t + \eta) + 2B]} \end{aligned}$$

при цьому при $t - \eta \rightarrow 0$ перше доданок у межі дає $-\frac{1}{6}(\frac{\pi A}{4h})^2$ Здобули інтегро-диференціальне рівняння, для вирішення якого можна застосувати метод ортогональних многочленів Враховуючи вид сингулярної частини рівняння, його рішення слід шукати у вигляді розкладання по многочленах Чебишева II роду

$$\chi^*(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \chi_n^* U_n(\eta)$$

з використанням спектрального співвідношення

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t - \eta|} \sqrt{1 - \eta^2} v_n(\eta) d\eta = -\pi(n + 1) v_n(t)$$

та умови ортогональності

$$\int_{-1}^1 v_n(t) \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{\pi}{2} \delta_{nm}$$

РОЗДІЛ 3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНИХ МНОГОЧЛЕНІВ.

Розв'язання інтегро-диференціального рівняння методом ортогональних многочленів.

Розглянемо отримане рівняння

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t - \eta|} \chi^*(\eta) d\eta \int_{-1}^1 M(t, \eta) \chi^*(\eta) d\eta = g(t), |t| < 1$$

де:

$$M(t, \eta) = L(t, \eta) - \frac{2\pi}{h} A \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k N_k \sin \lambda_k (At + B) \sin \lambda_k (A\eta + B)$$

$$g(t) = \frac{\pi(1 + G_*)}{ahG_2} A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\Delta_k} I_2(\lambda_k a) \sin \lambda_k (At + B)$$

і будемо шукати його рішення у вигляді

$$\chi^*(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \chi_n^* U_n(\eta)$$

Підставимо в рівняння

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^* \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \eta^2} \ln \frac{1}{|t - \eta|} v_n(\eta) d\eta + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^* \int_{-1}^1 M(t, \eta) \sqrt{1 - \eta^2} v_n(\eta) d\eta = g(t) \end{aligned}$$

та скористаємося спектральним співвідношенням

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \eta^2} \ln \frac{1}{|t - \eta|} v_n(\eta) d\eta = -\pi(n + 1) v_n(t), |t| < 1$$

Отримаємо

$$-\pi \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^*(n+1)v_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^* \int_{-1}^1 M(t,\eta) \sqrt{1-\eta^2} v_n(\eta) d\eta = g(t)$$

Помножимо отриманий вираз на $\sqrt{1-t^2}v_m(t)$ і проінтегруємо по t від -1 до 1

$$\begin{aligned} & -\pi \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^*(n+1) \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_m(t) v_n(t) dt + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^* \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M(t,\eta) \sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\eta^2} v_m(t) v_n(\eta) d\eta dt = \\ & = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} g(t) v_m(t) dt, m = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Враховуючи ортогональність многочлена Чебишева

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_m(t) v_n(t) dt = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}, \delta_{mn} = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi}{2}(m+1)\chi_m^* \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n^* \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M(t,\eta) \sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\eta^2} v_m(t) v_n(\eta) d\eta dt = \\ & = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} g(t) v_m(t) dt \end{aligned}$$

Регулюємо отриману нескінченну систему лінійних рівнянь алгебри. Для цього розділимо її на $-\frac{\pi^2}{2}\sqrt{m+1}$ і позначимо $\psi_m = \sqrt{m+1}\chi_m^*$

Отримана система набуде вигляду

$$\psi_m + \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \psi_n = b_m, m = 0, 1, \dots$$

$$a_{mn} = -\frac{2}{\pi^2 \sqrt{(m+1)(n+1)}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_m(t) dt \int_{-1}^1 M(t,\eta) \sqrt{1-\eta^2} v_n(\eta) d\eta$$

$$b_m = -\frac{2}{\pi^2 \sqrt{m+1}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} g(t) v_m(t)$$

Після вирішення отриманої системи методом редукції будуть знайдені коефіцієнти ψ_m , а значить і функція

$$\chi^*(\eta) = \sqrt{1-\eta^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m}{\sqrt{m+1}} v_m(\eta)$$

РОЗДІЛ 4

ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕННЯ

При розгляді завдань теорії пружності для тіл з дефектами інтерес представляє коефіцієнт інтенсивності напруження, який фігурує за умов руйнування тіл. Для випадку кручення циліндра з циліндричною тріщиною, він має вигляд

$$K^+ = \lim_{z \rightarrow d+0} \sqrt{2\pi(z-d)} \tau_{r\varphi}|_{a=0}$$

та

$$K^- = \lim_{z \rightarrow C-0} \sqrt{2\pi(c-z)} \tau_{r\varphi}|_{a=0}$$

Враховуючи наведені заміни змінних та отриманий раніше вираз для дотичної напруги $\tau_{r\varphi}$ отримаємо

$$K^+ = -\frac{2G_1}{\sqrt{\pi(d-c)}} \lim_{t \rightarrow 1+0} \sqrt{t-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-\eta|} \chi^*(\eta) d\eta$$

$$K^- = -\frac{2G_1}{\sqrt{\pi(d-c)}} \lim_{t \rightarrow -1-0} \sqrt{-t-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|t-\eta|} \chi^*(\eta) d\eta, |t| > 1$$

Підставимо в ці вирази уявлення

$$\chi^*(\eta) = \sqrt{1-\eta^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m}{\sqrt{m+1}} v_m(\eta)$$

Тоді:

$$K^+ = -\frac{2G_1}{\sqrt{\pi(d-c)}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m}{\sqrt{m+1}} \lim_{t \rightarrow t+0} \sqrt{t-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} \ln \frac{1}{|t-\eta|} v_m(\eta) d\eta$$

Для обчислення інтеграла, що входить сюди, скористаємося формулою:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} \ln \frac{1}{|t-\eta|} v_m(\eta) d\eta =$$

$$= \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - 1}} v_m(t) + \sqrt{t^2 - 1} \operatorname{sgn} t v'_m(t) - \frac{1}{2}(m+1)v_m(t), |t| > 1$$

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} K_+ &= -2G_1 \sqrt{\frac{\pi}{d-c}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m}{\sqrt{m+1}} \lim_{t \rightarrow 1+0} \sqrt{t-1} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} v_m(t) = \\ &= -G_1 \sqrt{\frac{2\pi}{d-c}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m}{\sqrt{m+1}} v_m(1) = -G_1 \sqrt{\frac{2\pi}{d-c}} \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m+1} \psi_m \end{aligned}$$

Де враховано, що $v_m(1) = m+1$

Аналогічно отримаємо

$$K_1 = -G_1 \sqrt{\frac{2\pi}{d-c}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sqrt{m+1} \psi_m$$

де враховано, що

$$v_m(-1) = (-1)^m v_m(1) = (-1)^m (m+1)$$

ВИСНОВКИ

Для розв'язку Вісісиметрична задача кручення двошарового циліндру з міжфазним дефектом використан підхід, що заключається в використанні інтегрального перетворення до рівняння Ламе. В результаті розв'язку отриманої задачі були знайдені коефіцієнти інтенсивності напруги.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Г.Я. Попов, В.В. Реут, Н.Д. Вайсфельд. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень. Одеса: Астропринт, 2005, 184 с.
2. Г.Я. Попов, В.В. Реут, М.Г. Моїсєєв, Н.Д. Вайсфельд. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів. Одеса: Астропринт, 2010, 120 с.
3. Yu. Protserov, N. Vaysfeld. The torsion problem of a multilayered finite cylinder with the multiple interface cylindrical cracks. *Meccanica*. Vol. 52, Issue 15, June 2017 , p. 3731 – 3742.
4. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982, 344 с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М: Мир, 1975, 872 с.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев В.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981, 800 с.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М: Наука, 1979, 832 с.